MA1 cvičení – opakování středoškolské matematiky – výběr příkladů 2 (funkce)
(trošku „obtížnější" příklady jsou označeny *)

Jednoduché funkce .

1. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$; $f(x)=\ln(x^2-1)$; $f(x)=\ln(\ln x)$; $f(x)=\ln(\ln x-1)$;
$f(x)=\ln(\ln(x-1))$;

c) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; $f(x)=\sqrt{1-(\sin x)^2}$; $f(x)=\sqrt{(\sin x)^2-1}$; $f(x)=\ln(\sin x)$;
$f(x)=\ln(\sin x-\frac{1}{2})$.

2. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu, jen opakování „taháku" grafů základních funkcí) :

a) $f(x)=x^2$ a pak zkuste také grafy funkcí $-x^2$; x^2+1 ; $(x+1)^2$; x^2+2x+2 ;
x^2+3x+2 ; $\left|x^2+3x+2\right|$;

navíc ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$;

b) $f(x)=|x|$ a pak zkuste také grafy funkcí $|x-1|$; $|x|-1$; $|-x|$; $|x-1|-1$; $\big||x-1|-1\big|$;

c) $f(x)=\sqrt{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$;
a pak ještě do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí x^2 a $\sqrt{x}$; x^3 a $\sqrt[3]{x}$;
a také ještě do jednoho obrázku grafy funkcí x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[4]{x}$;

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $-\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{|x|}$; $\dfrac{1}{x+1}$; $\dfrac{1}{x}+1$; $\dfrac{x-2}{x+1}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2-1}$;

f) $f(x)=e^x$ $(=\exp x)$ a pak zkuste také grafy funkcí $\exp(-x)$; $\exp(x-2)$; $\exp|x|$; $\exp(-|x|)$;
$*\exp(x^2)$; $*\exp(-x^2)$; $**\ \exp(\frac{1}{x})$;

g) $f(x)=\ln x$ a pak zkuste také grafy funkcí $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln x|$; $|\ln|x||$; $\ln(x+1)$;
$\ln\dfrac{1}{x}$; $\ln\dfrac{1}{|x|}$; $\ln(x^2)$; $\ln(-x^2)$; $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$;

($\ln x$ zde značí přirozený logaritmus čísla x)

h) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\cos x$ a zkuste také grafy funkcí $\sin(\frac{x}{2})$; $\cos(2x)$; $\cos(x+\pi)$; $|\sin x|$; $\sin|x|$;
$|\cos x|$; $\cos|x|$; $\sqrt{1-(\sin x)^2}$

a (**) pokuste se odhadnout a načrtnout grafy funkcí $\sin(x^2)$; $\sin(\frac{1}{x})$.

3. Vlastnosti funkce:

a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině $M \subseteq R$;
(iii) funkce prostá na $M \subseteq R$;
(iv) funkce inverzní k funkci f na $M \subseteq R$.

b)* Ukažte (bez užití derivace), že funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0]$.

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:

(i) $f(x) = x^2 + 2x + 2$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$; $h(x) = \exp(-x^2)$;

(ii)* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolický) ; * $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (kosinus hyperboliclý).

A pokuste se to i dokázat za předpokladu, že „víme", že funkce e^x je rostoucí funkce v R.

A dva „problémky" pro zájemce:

d*) Ukažte, že je-li funkce f lichá a $0 \in Df$, pak je $f(0) = 0$.

e*) Promyslete, zda lze z monotonie dvou (i více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je složená funkce definována). Pokuste se výsledek co nejpřesněji formulovat a třeba i dokázat.

4. Inverzní funkce:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):
Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a,b), pak je funkce f na intervalu (a,b) prostá, a tedy existuje k funkci f na intervalu (a,b) funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci

(i) $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty,0]$;

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$ na maximálních možných intervalech;

(iii) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ na maximálních možných intervalech;

(iv)* $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ na maximálních možných intervalech.